

Introduction à l'effet Casimir

Bertrand DUPLANTIER
 Service de Physique Théorique*
 Orme des Merisiers
 CEA, Saclay
 F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex

LA SOMME

*Devant la chaux d'un mur que rien
 ne nous défend d'imaginer comme infini
 un homme s'est assis et songe
 à tracer d'une touche rigoureuse
 sur le mur blanc le monde entier :
 portes, balances, jacinthes et tartares,
 anges, bibliothèques, labyrinthes,
 ancres, Uxmal, l'infini, le zéro.*

J.-L. Borges.

Constantes physiques

Constante de Planck : $\hbar = h/2\pi \simeq 1,055 \times 10^{-34}$ J s ;

vitesse de la lumière : $c \simeq 3 \times 10^8$ m s⁻¹ ;

constante de Boltzmann : $k_B \simeq 1,381 \times 10^{-23}$ J K⁻¹.

D'après Planck (1900) [1], l'énergie d'un mode stationnaire du champ électromagnétique, de vecteur d'onde \mathbf{k} , est quantifiée, avec naturellement $\hbar\omega_{\mathbf{k}} = h\nu$ par photon présent. En raison de la structure quadratique de l'énergie du champ électromagnétique, il existe une transformation canonique qui associe un hamiltonien d'oscillateur harmonique (à une dimension) à chaque mode. Au niveau classique, cette vision était déjà présente chez Rayleigh, et Planck a précisément découvert (ou même inventé) la quantification des niveaux d'énergie de ces oscillateurs. En effet, en mécanique quantique, nous savons que les niveaux d'un oscillateur harmonique sont quantifiés de manière régulière et donnés par

$$E_m = \hbar\omega \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad m \in \mathbf{N} . \quad (1)$$

Il existe une énergie fondamentale non nulle $\frac{1}{2}\hbar\omega$, reflet au principe d'incertitude d'Heisenberg. La théorie quantique du champ s'appuie précisément sur cette description par oscillateurs, identifiant le niveau m de l'oscillateur au nombre de photons dans le mode de pulsation ω . A priori, l'énergie du fondamental est bien présente dans la construction théorique. On parle de l'*énergie du vide quantique*, ici électromagnétique. On pourrait alors croire que l'énergie du vide, énergie de référence, est inobservable. Or, il n'en est rien, et le physicien hollandais H. B. G. Casimir a montré en 1948

*Unité de recherche associée au CNRS

dans un article célèbre [2] qu'une force *macroscopique*, a priori mesurable, pouvait être engendrée par les fluctuations du vide électromagnétique. Dans la géométrie originellement considérée par Casimir, cette force s'exerce entre deux plaques conductrices *non chargées*. Lorsque la température est non nulle, s'y ajoutent les effets du rayonnement du **corps noir** en équilibre thermique avec les surfaces conductrices. Lors d'expériences récentes en 1997-98 ([3, 4]), la force résultante entre une sphère et un plan, tous deux métallisés, a pu être mesurée avec précision à l'aide d'un microscope à force atomique.

Nous donnons ici un aperçu du calcul de Casimir, ainsi que sa généralisation aux effets de température. Remarquons tout d'abord qu'un argument dimensionnel permet d'anticiper la forme du résultat. Entre deux plaques très grandes, on attend ainsi l'existence d'une pression (force par unité de surface) quantique électromagnétique, dépendante donc a priori de \hbar , c et de la distance L entre plaques. Pour construire une pression, mesurée en unités de pression $P \propto \text{N m}^{-2} = \text{J m}^{-3}$, avec $\hbar \propto \text{J s}$, $c \propto \text{m s}^{-1}$, et $L \propto \text{m}$, il faut clairement multiplier \hbar par c , ce qui fait disparaître le temps, et enfin diviser par la puissance appropriée de L , c'est-à-dire L^{-4} . On trouve donc la seule forme possible a priori : $P_{\text{Casimir}} \propto \frac{\hbar c}{L^4}$. Par anticipation, on peut dire que la surprise sera que le coefficient soit non nul !

Le calcul de Casimir

Considérons deux plaques planes identiques, toutes deux parallèles au plan yOz et de grande aire $\mathcal{A} = L_y \times L_z$, séparées d'une distance L dans la direction orthogonale Ox .

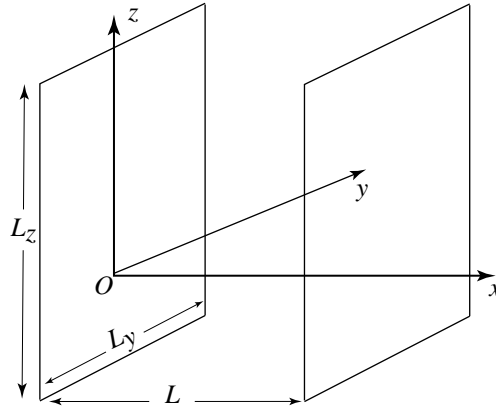


Figure 1. Configuration des plaques conductrices.

Les plaques sont supposées parfaitement conductrices, et les modes stationnaires du champ électromagnétique entre ces plaques sont décrits par un vecteur d'onde (k_x, \mathbf{k}) , où $\mathbf{k} = (k_y, k_z)$ est parallèle aux plaques ; dans la direction perpendiculaire aux plaques, les conditions aux limites électromagnétiques de conducteur parfait fixent la suite discrète de valeurs : $k_x = \frac{\pi n}{L}$, où n est un entier positif ou nul, tandis que dans les directions parallèles aux plaques, des conditions aux limites périodiques (fictives*) donnent pour les deux composantes de \mathbf{k} des valeurs de la forme $(k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z} \right)$, où n_y, n_z sont deux entiers relatifs : $n_y, n_z \in \mathbf{Z}$.

* On sait que le résultat asymptotique pour de grandes plaques ne dépend pas de ces conditions.

Ce mode de vecteur d'onde (k_x, k_y, k_z) , noté (n, \mathbf{k}) , oscille avec une pulsation ω (correspondant à une fréquence $\nu = \omega/2\pi$) :

$$\omega = \omega_n(\mathbf{k}) = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + \mathbf{k}^2}. \quad (2)$$

Chaque mode est doublement dégénéré, du fait des deux polarisations possibles de l'onde électromagnétique (à l'exception du mode $n = 0$ qui n'est pas dégénéré).

À température nulle, l'énergie électromagnétique de la cavité est la somme \mathcal{E}_0 des énergies de point zéro de chaque mode :

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\text{modes } (n, \mathbf{k})} \varepsilon_0[\omega_n(\mathbf{k})], \quad \varepsilon_0(\omega) = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (3)$$

Cette suite de modes est non bornée et la somme précédente *diverge*. La physique nous guide pour lui donner un sens : dans l'établissement des modes stationnaires dans une cavité, les conditions aux limites interviennent, et l'on a considéré que l'enceinte était un conducteur parfait. Or aucun conducteur n'est parfait jusqu'aux fréquences infinies : pour de très hautes fréquences, le matériau conducteur de la plaque devient diélectrique et transparent au rayonnement. Dans ce cas, les conditions aux limites ne s'appliquent plus, et les modes de très hautes fréquences ne vont pas contribuer à la force résultante. Ceci conduit à modifier la somme (3) en coupant les hautes fréquences, c'est-à-dire à introduire l'expression *régularisée* :

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\text{modes } (n, \mathbf{k})} \varepsilon_0[\omega_n(\mathbf{k})] \chi\left(\frac{\omega_n(\mathbf{k})}{\omega_c}\right), \quad (4)$$

où $\chi(\omega/\omega_c)$ est une fonction de coupure, telle que $\chi(0) = 1$, et régulière au voisinage de l'origine. Elle s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, pour ω/ω_c tendant vers l'infini, suffisamment vite pour que la somme régularisée soit convergente. La pulsation de coupure ω_c apparaît dans χ pour des raisons dimensionnelles ; elle dépend des caractéristiques microscopiques du matériau. (La limite du conducteur *parfait* va correspondre à $\omega_c \rightarrow +\infty$, pour laquelle $\chi(\omega/\omega_c) \rightarrow 1$ pour tout ω fini).

Dans la limite où l'on considère des plaques de grandes dimensions L_y, L_z , on peut remplacer la somme sur les vecteurs d'onde *parallèles* aux plaques par une intégrale. La distance L entre plaques, quant à elle, reste finie. Dans cette limite, on a [†]

$$\sum_{\text{modes } (n, \mathbf{k})} \dots = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^2} d^2\mathbf{k} \dots, \quad (5)$$

[†]Dans le cas de la géométrie de condensateur plan, $L_y, L_z \rightarrow +\infty$, la somme sur les entiers n_y, n_z , divisée par le produit $L_y L_z$, est une somme de Riemann, et tend vers l'intégrale sur les mêmes variables :

$$\frac{2\pi}{L_y} \frac{2\pi}{L_z} \sum_{n_y, n_z \in \mathbf{Z}^2} \dots \rightarrow \frac{2\pi}{L_y} \frac{2\pi}{L_z} \int_{\mathbf{R}^2} dn_y dn_z \dots = \int_{\mathbf{R}^2} dk_y dk_z \dots,$$

soit encore

$$\sum_{n_y, n_z \in \mathbf{Z}^2} \dots \rightarrow \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}^2} d^2\mathbf{k} \dots,$$

qui est la mesure habituelle bidimensionnelle sur les vecteurs d'ondes dans une grande boîte. Par ailleurs, dans la direction Ox où la longueur L reste finie, la somme $2 \sum_{n=0}^{\infty} \dots$ reste discrète et décrit les indices n de la partie transverse des modes électromagnétiques, y compris la dégénérescence 2 globale de polarisation, sauf pour le mode $n = 0$ qui est unique.

où le signe *prime* sur la somme signifie que le mode $n = 0$ est affecté d'un poids $1/2$. Posons $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(\omega) \chi(\omega/\omega_c)$. L'énergie (4) s'écrit alors à l'aide de (5)

$$\mathcal{E}_0(L) = 2 \frac{\mathcal{A}}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int_{\mathbf{R}^2} d^2\mathbf{k} \varepsilon[\omega_n(\mathbf{k})].$$

Comme l'on a par définition :

$$\omega^2 = \omega_n^2(\mathbf{k}) = c^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + \mathbf{k}^2 \right),$$

on a, à n fixé, la différentielle $\omega d\omega = c^2 k dk$, où $k = |\mathbf{k}|$. On a alors par intégration simple sur les vecteurs d'onde parallèles \mathbf{k} :

$$\int_{\mathbf{R}^2} d^2\mathbf{k} \varepsilon[\omega_n(\mathbf{k})] = \int_0^{+\infty} 2\pi k dk \varepsilon[\omega_n(k)] = \int_{\omega_n(0)}^{+\infty} 2\pi c^{-2} \omega d\omega \varepsilon(\omega), \quad (6)$$

et l'on trouve donc :

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{A} \frac{1}{\pi c^2} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int_{\omega_n}^{\infty} d\omega \omega \varepsilon_0(\omega) \chi\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad \omega_n \equiv \omega_n(0) = \pi c n / L. \quad (7)$$

La force associée, X_0 , se trouve par dérivation :

$$X_0 = -\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial L} = -\mathcal{A} \frac{1}{\pi c^2} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{L} \omega_n^2 \varepsilon_0(\omega_n) \chi\left(\frac{\omega_n}{\omega_c}\right), \quad (8)$$

soit encore :

$$X_0 = -\mathcal{A} \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \sum_{n=0}^{\infty}{}' g(n), \quad g(n) = n^3 \chi\left(\frac{\omega_n}{\omega_c}\right).$$

L'équivalent X_0^∞ de X_0 dans la limite L grand est donné, comme dans toute limite continue, par l'intégrale sur n au lieu de la somme "prime" sur n , soit

$$X_0^\infty = -\mathcal{A} \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \int_0^\infty dn g(n). \quad (9)$$

Pour obtenir la force totale de température nulle, venant de la seule énergie de point zéro $\varepsilon_0(\omega) = \frac{1}{2} \hbar \omega$, et s'exerçant sur la plaque considérée, on doit aussi prendre en compte la force (en sens contraire) exercée par le vide électromagnétique (infini) à l'*extérieur* du condensateur. Cette force n'est autre que l'opposée de (9), d'où la *force résultante* $\tilde{X}_0 = X_0 - X_0^\infty$. Cette résultante est donc la différence entre une série et son intégrale associée :

$$\tilde{X}_0 = -\mathcal{A} \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \left[\sum_{n=0}^{\infty}{}' g(n) - \int_0^\infty dn g(n) \right], \quad g(n) = n^3 \chi\left(\frac{\omega_n}{\omega_c}\right).$$

Pour évaluer une telle différence existe alors la formule d'*Euler-Maclaurin* :

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' g(n) - \int_0^{+\infty} dn g(n) = -\frac{1}{12} g'(0) + \frac{1}{6!} g'''(0) + O\left(g^{[5]}(0)\right), \quad (10)$$

qui contient toutes les dérivées d'ordre impair de g , prises à l'origine, et qui est valable pour une fonction g s'annulant à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées. En calculant les dérivées successives, on trouve ici

$$g'(0) = 0, \quad g'''(0) = 6\chi(0) = 6, \quad g^{[p]}(0) = O\left(\omega_c^{-(p-3)}\right), \quad p \geq 3.$$

On en déduit donc la valeur finie[‡]

$$\sum_{n=0}^{\infty} 'g(n) - \int_0^{\infty} dn g(n) = \frac{1}{5!} + O(\omega_c^{-2}).$$

La force résultante à température nulle possède donc une limite universelle pour des conducteurs parfaits, c'est-à-dire lorsque $\omega_c \rightarrow +\infty$. La pression limite, trouvée par H. B. G. Casimir en 1948, est :

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \tilde{X}_0 = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4}. \quad (11)$$

La force de Casimir est *attractive*, et l'on retrouve bien la forme analytique prévue pour la force par unité d'aire en fonction de \hbar , c et de la longueur L . Seul le coefficient numérique était à déterminer : $-\pi^2/240$, et le fait remarquable est qu'il est non nul et *universel*, c'est-à-dire indépendant de la nature des conducteurs parfaits. À la force de Casimir est associée une *énergie de point zéro* qui s'obtient par simple intégration

$$\tilde{X}_0 = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_0}{\partial L}, \quad \frac{1}{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{E}}_0 = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{L^3}. \quad (12)$$

Énergie libre électromagnétique d'un condensateur plan

Nous considérons dans la suite les effets de température[§], afin d'évaluer ceux-ci en regard de l'effet de point zéro. À une température donnée T , des photons vont être présents dans la cavité, qui vont suivre la distribution statistique du "rayonnement du corps noir". D'après la théorie de la quantification du champ électromagnétique, chaque mode propre *classique* (n, \mathbf{k}) est décrit par un hamiltonien d'oscillateur harmonique *quantique*, à une dimension, de pulsation $\omega = \omega_n(\mathbf{k})$, donnée par (2). Les niveaux d'énergie de ce hamiltonien sont alors $\varepsilon_m = \hbar\omega(m + 1/2)$, où $m \geq 0$ est le nombre de photons, chacun d'énergie $\hbar\omega = h\nu$, présents dans le mode considéré.

En se restreignant d'abord à un seul mode de pulsation ω , l'énergie libre de cet oscillateur quantique à l'équilibre à la température T se met alors sous la forme

$$f(\omega) = \varepsilon_0(\omega) + f_T(\omega), \quad (13)$$

avec

$$\varepsilon_0(\omega) = \frac{1}{2} \hbar\omega, \quad f_T(\omega) = \beta^{-1} \varphi(\beta \hbar\omega), \quad (14)$$

où $f_T(\omega)$ est la partie d'énergie libre *thermique* du mode, $\beta = 1/k_B T$, où k_B est la *constante de Boltzmann*, et où $\varphi(x)$ est une fonction simple. En effet, la fonction de partition d'un oscillateur harmonique est bien connue :

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta E_m} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar\omega(m+\frac{1}{2})} = e^{-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}},$$

[‡]On peut remarquer que c'est la présence du facteur n^3 , rapidement variable avec n , qui a donné la valeur finie $g'''(0) = 3!$ par dérivation. En l'absence d'un tel facteur, la formule d'Euler-Maclaurin aurait commencé par $g'(0) = O(\omega_c^{-1})$, et la différence entre somme et intégrale aurait disparu dans la limite du conducteur parfait.

[§]Les premiers calculs sont dus à Fierz [5] et Mehra [6].

ce qui donne l'énergie libre :

$$f(\omega) = -\frac{1}{\beta} \ln Z = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}),$$

soit pour la fonction φ :

$$\varphi(x) = \ln(1 - e^{-x}), \quad [\varphi(x) \leq 0].$$

Notons que par construction la limite de température nulle de $f_T(\omega)$ est nulle.

L'énergie libre électromagnétique purement *thermique* de la cavité située entre les plaques est alors définie, en sommant la partie thermique de l'énergie libre de chaque mode, comme :

$$\mathcal{F}_T = \sum_{\text{modes } (n, \mathbf{k})} f_T[\omega_n(\mathbf{k})]. \quad (15)$$

À la différence de la somme sur les modes (3) associée au vide, la somme (15) associée au rayonnement thermique est *convergente*. On peut l'écrire, en utilisant (5),

$$\mathcal{F}_T(L) = \sum_{\text{modes } (n, \mathbf{k})} \beta^{-1} \varphi[\beta \hbar \omega_n(\mathbf{k})] = 2 \frac{\mathcal{A}}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^2} d^2 \mathbf{k} \beta^{-1} \varphi[\beta \hbar \omega_n(\mathbf{k})]. \quad (16)$$

À n fixé, on a d'après l'expression (2) la différentielle $\omega d\omega = c^2 k dk$, où $k = |\mathbf{k}|$. Dans l'énergie libre thermique (16) on a alors par simple intégration sur les vecteurs d'onde parallèles \mathbf{k} :

$$\int_{\mathbf{R}^2} d^2 \mathbf{k} \varphi[\beta \hbar \omega_n(\mathbf{k})] = \int_0^{+\infty} 2\pi k dk \varphi[\beta \hbar \omega_n(k)] = \int_{\omega_n(\mathbf{0})}^{+\infty} 2\pi c^{-2} \omega d\omega \varphi(\beta \hbar \omega). \quad (17)$$

On introduit la variable $x = \beta \hbar \omega$, qui est sans dimension, ainsi que les bornes $u_n = \beta \hbar \omega_n(\mathbf{0})$, et l'on obtient l'énergie libre comme une série simple :

$$\mathcal{F}_T(L) = 2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta} \frac{1}{(\beta \hbar c)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \psi(u_n), \quad (18)$$

où

$$\psi(u) = \int_u^{+\infty} dx x \varphi(x). \quad (19)$$

Les bornes inférieures successives u_n s'expriment en fonction du paramètre fondamental sans dimension α :

$$\alpha = \beta \pi \hbar c / L, \quad u_n = n \alpha. \quad (20)$$

En comparant les énergies $\hbar \omega$ de photons appartenant à deux modes consécutifs, on peut préciser, à l'aide du paramètre α , le domaine de température ou d'espacement des plaques pour lequel le caractère discret des modes disparaît. Pour simplifier, on prend des vecteurs d'onde parallèles nuls pour ces deux modes : $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Pour de tels modes, l'écart entre les énergies de deux photons associés est donc $\hbar \Delta \omega = \hbar[\omega_{n+1}(\mathbf{0}) - \omega_n(\mathbf{0})] = \hbar \pi c / L = \alpha k_B T$. Le caractère discret des modes disparaîtra si cette différence d'énergie est petite devant l'énergie thermique $k_B T$, soit $\alpha \leq 1$. À température ordinaire, $T \simeq 300$ K, cela donne $L \geq 24 \mu\text{m}$, et à plus courte distance le caractère discret sera détectable.

On peut maintenant calculer, dans la limite L grand, l'équivalent de l'énergie libre $\mathcal{F}_T(L)$ (18), que l'on note alors $\mathcal{F}_T^\infty(L)$. D'après la discussion précédente, dans la limite de grandes distances

(ou de haute température) $\alpha = \beta\hbar c/L \ll 1$, on est en présence d'un continuum de modes. Dans cette limite, les u_n varient continûment. La somme sur n dans \mathcal{F}_T , si on la multiplie par $\alpha \propto 1/L$, devient une somme de Riemann, et tend vers l'intégrale convergente avec comme mesure $\alpha dn = du$.
¶

On a donc :

$$\alpha \mathcal{F}_T^\infty \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \mathcal{F}_T = 2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^2} \int_0^{+\infty} du \psi(u).$$

Une intégration par parties donne immédiatement : $\int_0^{+\infty} du \psi(u) = - \int_0^{+\infty} du u\psi'(u)$ puisque la fonction ψ s'annule à l'infini. D'où

$$\int_0^{+\infty} du \psi(u) = \int_0^{+\infty} dx x^2 \varphi(x) = -I_2 = -2\zeta(4) = -\frac{\pi^4}{45},$$

où l'on a utilisé l'intégrale

$$I_p = - \int_0^{+\infty} dx x^p \ln(1 - e^{-x}) = p! \zeta(p+2), \quad p \in \mathbf{N}, \quad (21)$$

et la fonction ζ de Riemann

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Après division par α , l'énergie libre ainsi obtenue,

$$\mathcal{F}_T^\infty = 2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^2} \left(-\frac{2}{\alpha} \zeta(4) \right) = -\frac{\mathcal{A} L}{\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^3} \frac{\pi^2}{45}, \quad (22)$$

est précisément l'énergie libre du corps noir dans un volume $\Omega = \mathcal{A} \times L$. La limite $L \rightarrow \infty$ a restauré la symétrie entre les trois directions de l'espace, et l'on retrouve la limite des grands volumes.

Pour le calcul des forces, il va être utile d'introduire l'énergie libre thermique, *relative* ou encore *soustraite*, définie comme :

$$\tilde{\mathcal{F}}_T = \mathcal{F}_T - \mathcal{F}_T^\infty. \quad (23)$$

Son expression explicite se trouve par (18) et (22)

$$\tilde{\mathcal{F}}_T = 2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} ' \psi(u_n) - \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} du \psi(u) \right] \quad (24)$$

$$= 2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} ' \psi(\alpha n) + \frac{2}{\alpha} \zeta(4) \right]. \quad (25)$$

¶ Il faut ici remarquer que la présence du "prime" dans la somme sur n et du facteur $\frac{1}{2}$ pour le mode $n = 0$ ne joue pas de rôle dans la limite L grand. La différence entre les deux sommes est en effet finie, alors que l'on évalue ici ces sommes à l'ordre $O(L)$, supposé grand.

Forces dues au rayonnement thermique

Le rayonnement compris dans cette enceinte, à l'équilibre thermique, exerce une pression sur les plaques. Comme en thermodynamique, la pression se calcule comme la dérivée de l'énergie libre par rapport au volume, soit $P_T = -\frac{\partial \mathcal{F}_T}{\partial \Omega}$. Ici, pour un déplacement de la plaque de droite, par exemple, on peut écrire $d\Omega = \mathcal{A} dx = \mathcal{A} dL$. D'où $P_T = -\frac{1}{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{F}_T}{\partial L}$, ce qui donne la formule pour la force

$$X_T(L) = -\frac{\partial \mathcal{F}_T(L)}{\partial L}. \quad (26)$$

Elle se calcule à partir de l'expression (18) de l'énergie libre, à l'aide des équations élémentaires

$$-\frac{\partial \psi(u_n)}{\partial L} = -\frac{\partial u_n}{\partial L} \psi'(u_n) = \frac{\partial u_n}{\partial L} u_n \varphi(u_n),$$

où $\partial u_n / \partial L = -u_n / L$. Soit :

$$X_T = -2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta L} \frac{1}{(\beta\hbar c)^2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \varphi(u_n). \quad (27)$$

Cette force, perpendiculaire à la plaque, est positive ($\varphi(x) \leq 0$), donc répulsive. C'est la force de pression du corps noir en géométrie finie, où le caractère discret des modes apparaît clairement par la présence même de la série.

Dans la limite $L \rightarrow \infty$, on doit retrouver la force de pression du corps noir de volume infini, soit

$$X_T^\infty = -\frac{\partial \mathcal{F}_T^\infty}{\partial L} = \frac{\mathcal{A}}{\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^3} \frac{\pi^2}{45}. \quad (28)$$

C'est bien en effet la limite obtenue pour (27) en y remplaçant la somme sur n par l'intégrale correspondante.

En fait, une plaque métallique maintenue à la température T est en équilibre thermique avec le rayonnement existant de chaque côté. Par conséquent, cette plaque va être soumise également à l'action des photons extérieurs à la cavité. La force due au rayonnement électromagnétique situé à l'extérieur (infini) du condensateur est alors simplement la force de pression du corps noir de volume infini, que nous venons de calculer, qui est négative pour la plaque de droite, et donc simplement égale à $-X_T^\infty$.

En définitive, la force *résultante* thermique, notée $\tilde{X}_T(L)$, exercée par l'ensemble du rayonnement thermique sur la plaque considérée, ici de droite, est simplement la force :

$$\tilde{X}_T = X_T - X_T^\infty = -\frac{\partial (\mathcal{F}_T - \mathcal{F}_T^\infty)}{\partial L} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_T}{\partial L}. \quad (29)$$

Développement de courte distance ou de basse température

L'expression en série (27) de la force X_T , due au rayonnement thermique situé à l'intérieur des plaques, fournit un développement naturel de *basse température* ou, de manière équivalente de *courte distance*, où $\alpha = \beta\pi\hbar c/L \gg 1$. En effet, on remarque tout d'abord que le terme $n = 0$ ne contribue pas à la force, car $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$. Pour $n \geq 1$ $u_n = n\alpha = n\beta\pi\hbar c/L \gg 1$, et $\varphi(x) \sim -e^{-x}$ pour x grand, d'où $u_n^2 \varphi(u_n)_{\alpha \gg 1} \simeq -n^2 \alpha^2 e^{-n\alpha}$. Le mode $n = 1$ contribue ainsi une force répulsive dominante, exponentiellement petite. On a ainsi :

$$X_T = -2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta L} \frac{1}{(\beta\hbar c)^2} [\alpha^2 \varphi(\alpha) + 4\alpha^2 \varphi(2\alpha) + \dots],$$

soit, après réduction :

$$X_T = \mathcal{A} \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{L^3} [e^{-\alpha} + O(e^{-2\alpha})], \quad \alpha \gg 1.$$

Dans la force *résultante thermique* (29) \tilde{X}_T , la force dominante est la force de poussée due au rayonnement extérieur du corps noir, tandis que le mode interne $n = 1$ contribue une force répulsive, exponentiellement petite. On a plus précisément :

$$\tilde{X}_T = -2 \frac{\mathcal{A}}{2\pi\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^2} \frac{1}{L} \{2\zeta(4)\alpha^{-1} - \alpha^2 [e^{-\alpha} + O(e^{-2\alpha})]\}, \quad \alpha = \frac{\pi\beta\hbar c}{L}.$$

Soit explicitement :

$$\frac{\tilde{X}_T}{\mathcal{A}} = -\frac{\pi^2}{45} \frac{1}{\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^3} + \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{L^3} [e^{-\alpha} + O(e^{-2\alpha})]. \quad (30)$$

Énergie libre totale

Introduisons finalement l'énergie libre totale $\tilde{\mathcal{F}}$ associée à la résultante totale des forces, et provenant de l'énergie du vide et de l'énergie libre thermique :^{||}

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{E}}_0 + \tilde{\mathcal{F}}_T = \tilde{\mathcal{E}}_0 + \mathcal{F}_T - \mathcal{F}_T^\infty. \quad (31)$$

Il est alors utile de réécrire l'énergie libre thermique (24) sous la forme plus explicite en la variable α :

$$\tilde{\mathcal{F}}_T(L, \alpha) = \mathcal{A} \frac{\pi^2 \hbar c}{L^3} \mathcal{G}(\alpha) \quad (32)$$

$$\mathcal{G}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\alpha n) + \frac{2}{\alpha} \zeta(4) \right]. \quad (33)$$

L'énergie libre totale est donc simplement dans ces notations (voir (12))

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{E}}_0 + \tilde{\mathcal{F}}_T = \mathcal{A} \frac{\pi^2 \hbar c}{L^3} \left[-\frac{1}{720} + \mathcal{G}(\alpha) \right]. \quad (34)$$

Le développement de basse température de \mathcal{G} est pour $\alpha \gg 1$:

$$\mathcal{G}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^3} \left[\frac{1}{2} \psi(0) + \psi(\alpha) + \dots + \frac{2}{\alpha} \zeta(4) \right]. \quad (35)$$

Nous avons, d'après les définitions (19) de ψ et (21)

$$\psi(0) = -I_1 = -\zeta(3) \quad (36)$$

$$\psi(\alpha) = -(\alpha + 1) [e^{-\alpha} + O(e^{-2\alpha})], \quad \alpha \gg 1, \quad (37)$$

d'où explicitement :

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{A} \frac{\pi^2 \hbar c}{L^3} \left\{ -\frac{1}{720} + \frac{1}{\alpha^3} \left[-\frac{1}{2} \zeta(3) + \frac{2}{\alpha} \zeta(4) - (\alpha + 1) [e^{-\alpha} + O(e^{-2\alpha})] \right] \right\}. \quad (38)$$

^{||} Cette énergie libre totale $\tilde{\mathcal{F}}$ est donc soustraitée, en ce sens qu'elle tient compte de l'effet de l'extérieur des parois, et elle est identique à celle qui apparaît dans la contribution suivante de R. Balian, où elle est notée $F(T)$. On a donc aussi la correspondance : $\tilde{\mathcal{F}}_T = F(T) - F(0)$.

avec $\alpha = \beta\pi\hbar c/L \gg 1$.

Le *développement de haute température* peut être obtenu à partir de l'expression (32) et de la formule de Poisson. On peut aussi utiliser une formule remarquable de *dualité basse et haute températures*, satisfaite par la fonction \mathcal{G} [7]

$$\alpha^2 \mathcal{G}(\alpha) = \alpha'^2 \mathcal{G}(\alpha') \quad (39)$$

$$\alpha\alpha' = (2\pi)^2, \quad (40)$$

ce qui donne pour l'énergie libre thermique (32) : **

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\text{T}}(L, \alpha) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4 \tilde{\mathcal{F}}_{\text{T}}\left(L, \frac{(2\pi)^2}{\alpha}\right). \quad (41)$$

On déduit alors de (38) la limite haute température de l'énergie libre totale :

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{A} \frac{\zeta(3)}{8\pi\beta L^2} + O\left(\beta^{-2} e^{-\frac{4\pi^2}{\alpha}}\right). \quad (42)$$

avec $\alpha = \beta\pi\hbar c/L \ll 1$.

Comparaison des effets thermiques et de point zéro

Nous avons vu que la force résultante de Casimir à température nulle possède une limite universelle pour des conducteurs parfaits :

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \tilde{X}_0 = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4}.$$

La force résultante totale, \tilde{X} , est définie à partir de l'énergie libre totale (31) comme :

$$\tilde{X} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial L}. \quad (43)$$

En rassemblant les résultats précédents (30), on trouve que la force résultante totale s'exerçant par unité d'aire sur la plaque, est à basse température ou à courte distance :

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \tilde{X} = \frac{1}{\mathcal{A}} (\tilde{X}_0 + \tilde{X}_{\text{T}}) = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4} - \frac{\pi^2}{45} \frac{1}{\beta} \frac{1}{(\beta\hbar c)^3} + \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{L^3} e^{-\alpha} + \dots \quad (44)$$

La force résultante est dominée par la force de Casimir et par celle du corps noir, toutes deux attractives, la première correction due aux modes internes discrets étant exponentiellement petite.

Pour $L = 1\mu\text{m}$, on a $\alpha \simeq 24$. On est donc loin déjà dans le domaine discret pour les modes intérieurs aux plaques : le premier ne contribue pas à la force thermique, si ce n'est avec un facteur e^{-24} ! Le rapport $\gamma = \frac{\tilde{X}_{\text{T}}}{\tilde{X}_0}$ est donc, d'après (44), égal à :

$$\gamma \simeq -\frac{X_{\text{T}}^{\infty}}{\tilde{X}_0} = \frac{240}{45} \frac{L^4}{(\beta\hbar c)^4} = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4. \quad (45)$$

Pour $L = 500\text{nm}$, $\alpha = 48$, on trouve $\gamma = 0,98 \times 10^{-4}$. On voit donc que, même à température ordinaire, l'effet des fluctuations du vide domine largement la force de corps noir. Tout se passe comme si l'on était à température nulle, et des expériences sensibles vont être capables de détecter l'effet quantique du vide électromagnétique.

** Cette dualité n'est valable que pour la configuration des plaques parallèles ; voir la contribution de R. Balian dans le même séminaire.

Force entre plan et sphère, et approximation de Derjaguin

• Force entre plan et sphère : la situation expérimentale réelle est décrite sur la figure. Une sphère métallisée de rayon R est placée en regard d'un plan conducteur, à une distance d'approche $OO' = L$ de celui-ci.

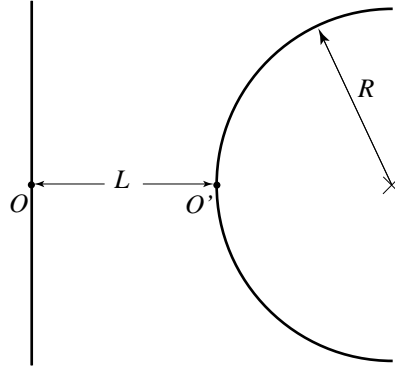


Figure 2. Configuration expérimentale des surfaces conductrices.

Dans les expériences menées en 1998 [4], une sphère de polystyrène est en effet montée sur le bras d'un microscope à force atomique, et approchée d'une surface plane polie. Sur chacune de ces surfaces est déposée une couche d'aluminium de quelques centaines de nanomètres d'épaisseur. Elles sont ensuite couvertes, pour éviter toute corrosion, d'une très fine couche d'alliage, qui est transparente au rayonnement impliqué. Le rayon total de la sphère ainsi métallisée est de l'ordre de $R = 98,0 \pm 0,25 \mu\text{m}$. Les distances d'approche varient dans le domaine $120 \text{ nm} \leq L \leq 500 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Les mesures sont faites à la *température ambiante*.

Une méthode d'approximation, due à Derjaguin (1934) [8], permet en fait, dans la limite $L \ll R$, de calculer l'interaction sphère-plan en terme de l'interaction entre deux plans. Elle consiste à remplacer, au voisinage du point d'approche minimal O' de la sphère, les tranches élémentaires successives de sphère par leur projection orthogonale dans la direction de la surface conductrice plane. La force résultante sur la sphère s'écrit alors :

$$X^{\text{sph}}(L) = 2\pi R \int_L^{+\infty} \frac{1}{A} \tilde{X}(x) dx, \quad (46)$$

où $\frac{1}{A} \tilde{X}(x)$ est la force résultante totale par unité d'aire (43), s'exerçant entre deux *plans* séparés d'une distance x .

Dans le domaine de mesures : $120 \text{ nm} \leq L \leq 500 \text{ nm}$, la valeur minimale de α est $\alpha_{\min} = \alpha(L = 500 \text{ nm}) = 48$. D'après la discussion suivant l'équation (45) on a donc $\gamma = \tilde{X}_T / \tilde{X}_0 \leq 10^{-4}$. En première approximation, on remplace donc, dans l'expression intégrale pour la sphère, la force totale entre plans par la force de Casimir de température nulle. †† La force de Casimir sur la sphère

††Remarque : Il faut faire ici un peu attention, car dans l'intégrale (46) le domaine d'intégration va en principe jusqu'à l'infini. Dans ce domaine, qui est équivalent à celui de haute température, la force thermique \tilde{X}_T (qui est en fait la force de van der Waals entre plans) finit par l'emporter sur \tilde{X}_0 , et l'on ne peut plus invoquer l'argument précédent. En fait, l'approximation de Derjaguin consistant à remplacer, au voisinage du point d'approche minimal O' de la sphère, les tranches élémentaires successives de sphère par leur projection orthogonale dans la direction de l'autre surface conductrice plane, on conçoit physiquement que seul le domaine de distances $x \ll R$ soit important dans cette approximation, et que l'approximation par la force de température nulle ou de courte distance soit valable. On peut par ailleurs remarquer que pour x très grand, la force thermique résultante $\tilde{X}_T(x) = X_T(x) - X_T^\infty(x)$ tend vers sa limite de grande distance, qui est nulle par construction, et que l'intégrale de Derjaguin converge rapidement. L'analyse des corrections thermiques, donnée dans le paragraphe suivant, confirme ce point.

s'écrit donc dans cette limite :

$$X^{\text{sph}}(L) \simeq X_0^{\text{sph}}(L) = 2\pi R \frac{1}{\mathcal{A}} \int_L^{+\infty} \tilde{X}_0(x) dx = 2\pi R \frac{1}{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{E}}_0(L), \quad (47)$$

où $\tilde{\mathcal{E}}_0(L)$ est l'énergie dont dérive la force de Casimir (11) entre deux plans :

$$\tilde{X}_0 = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_0}{\partial L}, \quad \frac{1}{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{E}}_0 = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 L^3}. \quad (48)$$

La force de Casimir sur la sphère s'écrit donc finalement :

$$X_0^{\text{sph}}(L) = -\frac{\pi^3}{360} R \frac{\hbar c}{L^3}. \quad (49)$$

Avec un rayon de sphère $R = 98,0 \pm 0,25 \mu\text{m}$, et pour $L = 200 \text{ nm}$, on trouve par exemple : $X^{\text{sph}} \simeq -33,4 \pm 0,09 \times 10^{-12} \text{ N}$. Cette force est donc de l'ordre de la dizaine de pico-newtons, une force parfaitement mesurable et, par ailleurs, comparable aux forces mises en jeu dans les systèmes biologiques, par exemple lors de micromanipulations de molécules d'ADN.

Corrections de température dans la formule de Derjaguin

À partir de l'expression (46) et de la définition (43) de \tilde{X} nous trouvons immédiatement :

$$X^{\text{sph}}(L) = 2\pi R \frac{1}{\mathcal{A}} \left[\tilde{\mathcal{F}}(L) - \tilde{\mathcal{F}}(+\infty) \right] \quad (50)$$

$$= 2\pi R \frac{1}{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{F}}(L), \quad (51)$$

où nous utilisons le fait que l'énergie libre complète $\tilde{\mathcal{F}}$ s'annule à grande distance, comme le montre l'équivalent (42). Nous pouvons alors reprendre pour le domaine expérimental l'équivalent de courte distance (38) de $\tilde{\mathcal{F}}(L)$, qui nous donne l'expression de la force complète sur la sphère :

$$X^{\text{sph}}(L) = -\frac{\pi^3}{360} R \frac{\hbar c}{L^3} \left\{ 1 - \frac{720}{\alpha^3} \left[-\frac{1}{2} \zeta(3) + \frac{2}{\alpha} \zeta(4) - (\alpha + 1) [e^{-\alpha} + O(e^{-2\alpha})] \right] \right\}. \quad (52)$$

En ne gardant que les termes non exponentiellement petits, nous pouvons finalement écrire

$$X^{\text{sph}}(L) = -\frac{\pi^3}{360} R \frac{\hbar c}{L^3} \left\{ 1 + 720 \left[\frac{1}{2\alpha^3} \zeta(3) - \frac{2}{\alpha^4} \zeta(4) + O(\alpha^{-2} e^{-\alpha}) \right] \right\}. \quad (53)$$

La correction thermique dans la formule (53) est en fait dominée par le terme en $\zeta(3)$, ce qui donne dans le domaine expérimental considéré ($L \leq 500 \text{ nm}$, $\alpha_{\text{min}} = 48$) une correction thermique relative de l'ordre de 4×10^{-3} , et de même signe que la force de Casimir (49). La formule (53) est utilisée par les expérimentateurs [4].

La formule théorique simple (49) de point zéro est donc comparée sur la figure 3 aux résultats expérimentaux. La courbe théorique (49) est indiquée en tirets. On voit qu'un bon accord existe. Cependant, l'écart avec la courbe expérimentale croît quand L diminue. Il est de l'ordre de la dizaine de %. Les corrections de température ne peuvent expliquer cet écart avec les résultats expérimentaux. De même signe que la force de Casimir, elles accroissent, quoique qu'insensiblement, l'écart théorie-expérience. L'accord théorie-expérience est restauré lorsque des corrections de conductivité finie et de rugosité de surfaces sont apportées [4]. (Voir la description complète de ces expériences et l'analyse de ces corrections dans la contribution de S. Reynaud dans le même séminaire.) Remarquons enfin qu'il faudrait également effectuer l'analyse théorique des *corrections géométriques* à la formule de Derjaguin (46), et pour ce faire utiliser les méthodes générales introduites en [9], qui sont décrites dans la contribution suivante de R. Balian à ce séminaire.

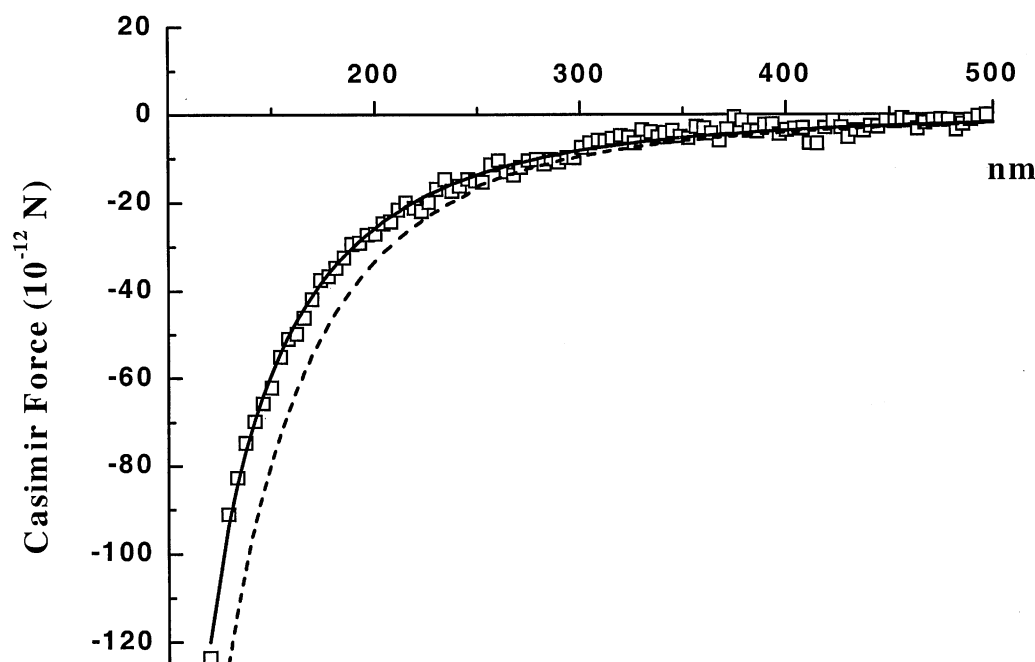


Figure 3. Comparaison de la force calculée (49) (en trait pointillé) avec les résultats expérimentaux ; la courbe en trait plein tient compte des corrections de conductivité finie et de rugosité de surface (expériences de U. Mohideen et A. Roy, *Physical Review Letters*, **81**, 4549 (1998)).

En conclusion, on peut dire que l'on observe donc, dans ces expériences, des forces macroscopiques électromagnétiques, engendrées par les fluctuations quantiques du vide, proportionnelles à $\hbar c$, et ceci en l'absence de toute charge et de tout photon dans la cavité !^{‡‡} Planck, lorsqu'il inventa sa fameuse formule de quantification pour le corps noir, et introduisit la constante h , certes sans pouvoir encore imaginer le complément d'énergie du vide à la théorie du corps noir, avait vraiment déchiré un coin du voile.

Aujourd'hui, la littérature sur l'effet Casimir et ses divers développements physiques et mathématiques est devenue énorme, allant de l'énergie du vide pour les différents champs quantiques jusqu'aux effets de taille finie dans les systèmes critiques. Faisons donc le choix ici de ne citer que les ouvrages récemment parus, qui pourront guider le lecteur ou la lectrice intéressé(e) vers d'autres articles de recherche [10, 11, 12, 13, 14, 15].

Références

- [1] M. Planck, *Ann. d. Phys.* **4**, 553 (1901).
- [2] H.B.G. Casimir, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **B51**, 793 (1948).
- [3] S.K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997); *ibid* **81**, 5475 (1998).
- [4] U. Mohideen et A. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549 (1998).
- [5] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **33**, 855 (1960).
- [6] J. Mehra, *Physica* **37**, 145 (1967).
- [7] L. S. Brown et G. J. Maclay, *Phys. Rev.* **184**, 1272 (1969).

^{‡‡}En fait, il y a bien sûr une infinité de photons mous longitudinaux, avec $n = 0$, qui ne contribuent pas à la force ; en revanche, les photons à $n \geq 1$ sont essentiellement absents de la cavité, ce qui permet d'observer l'effet de l'énergie du vide.

- [8] B Derjaguin, *Kolloid Z.* **69**, 155 (1934).
- [9] R. Balian et B. Duplantier, *Ann. Phys.* **104**, 300 (1977); *Ann. Phys.* **112**, 165 (1978).
- [10] F. S. Levin et D. A. Micha *eds.*, *Long-Range Casimir Forces*, Plenum Press, New York (1993).
- [11] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press, San Diego (1994).
- [12] V. M. Mostepanenko et N. N. Trunov, *The Casimir Effect and its Applications*, Clarendon Press, Oxford (1997).
- [13] E. Elizalde *et al.*, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Scientific, Singapour (1994).
- [14] M. Krech, *The Casimir Effect in Critical Systems*, World Scientific, Singapour (1994).
- [15] J. G. Brankov, D. M. Danchev, N. S. Tonchev, *Theory of Critical Phenomena in Finite-Size Systems*, World Scientific, Singapour (2000).